FIȘĂ DE LUCRU · PYTHON · CLASA A IX-A · FIȘA 6 · LECȚIA PY9-06

# cmmdc și algoritmul lui Euclid

Durată: 100 min  Nivel: mate-info · Python

**CE VEI ȘTI DUPĂ LECȚIE**

- Urmărești pas cu pas ambele variante ale algoritmului lui Euclid și numeri pașii.
- Repari greșelile tipice: valori pierdute, `/` în loc de `//`, cazul 0, semnul numitorului.
- Scrii programe cu cmmdc și cmmmc în contexte practice, inclusiv operații cu fracții.

## Ce trebuie să știi (o pagină)

| Ce | Cod / regulă | Observații |
|---|---|---|
| Euclid prin scăderi | `while a != b:` scazi pe cel mic din cel mare | doar pentru `a, b > 0`; lent când numerele sunt foarte diferite |
| Euclid prin împărțiri | `while b != 0: a, b = b, a % b` → rezultatul este `a` | rapid; merge și cu `b = 0`; nu contează ordinea |
| de ce funcționează | `cmmdc(a, b) = cmmdc(a − b, b) = cmmdc(b, a % b)` | numerele scad mereu, deci bucla se termină |
| cmmmc | `a // cmmdc(a, b) * b` | lucrezi pe **copii**: Euclid modifică `a` și `b` |
| relația | `cmmdc · cmmmc = a · b` | doar pentru **două** numere |
| prime între ele | `cmmdc(a, b) == 1` | ex.: 8 și 15 |
| fracție simplificată | `a // g` / `b // g`, cu `g = cmmdc(abs(a), abs(b))` | semnul îl ține numărătorul; numitorul ≠ 0 |
| `a/b + c/d` | `(a·d + b·c) / (b·d)` | apoi simplifici |
| `a/b : c/d` | `(a·d) / (b·c)` | doar dacă `c ≠ 0` |
| verificare | `math.gcd(a, b)`, `math.lcm(a, b)` | după `import math`; doar ca să-ți verifici algoritmul |

**SFAT**

Când urmărești un algoritm, fă un tabel cu o coloană pentru fiecare variabilă și un rând pentru fiecare trecere prin buclă. Numărul de rânduri este numărul de pași.

## Nivelul 1 · Prezice

★ citește și prezice

**P1.** Scrie valorile lui `a` și `b` după fiecare pas și ce se afișează la final.

```
a, b = 35, 21
while a != b:
    if a > b: a -= b
    else: b -= a
print(a)
```

**P2.** Aceeași cerință, varianta cu împărțiri, pentru `a, b = 252, 105`.

**P3.** Ce afișează? Ce reprezintă `c`?

```
a, b = 13, 8
c = 0
while b != 0:
    a, b = b, a % b
    c += 1
print(a, c)
```

**P4.** Ce afișează?

```
a, b = 24, 36
x, y = a, b
while y != 0:
    x, y = y, x % y
print(x, a // x * b, a, b)
```

**P5.** O variantă des întâlnită la Bac. Ce afișează pentru `(30, 12)`, pentru `(12, 30)` și pentru `(7, 7)`?

```
while a % b != 0:
    a, b = b, a % b
print(b)
```

**P6.** Ce afișează? Spune în cuvinte ce numără programul.

```
c = 0
for i in range(1, 13):
    a, b = i, 12
    while b != 0:
        a, b = b, a % b
    if a == 1:
        c += 1
print(c)
```

**P7.** Câte scăderi face Euclid prin scăderi pentru `(1, 50)`? Dar pentru `(50, 50)` și `(50, 1)`?

**P8.** Ce afișează?

```
n, m = 84, 126
a, b = n, m
while b != 0:
    a, b = b, a % b
print(f"{n // a}/{m // a}")
```

## Nivelul 2 · Găsește și repară

★★ găsește și repară

**P9.** Programul folosește varianta din P5, dar pentru `30 12` afișează `12` în loc de `6`. Ce rând este greșit?

```
a, b = map(int, input().split())
while a % b != 0:
    a, b = b, a % b
print(a)
```

**P10.** Programul trebuie să afișeze cmmmc. Pentru `12 18` afișează `0`. De ce? Repară-l.

```
a, b = map(int, input().split())
while b != 0:
    a, b = b, a % b
print(a * b // a)
```

**P11.** *Rânduri amestecate.* Ordonează rândurile ca programul să afișeze **cmmdc al tuturor numerelor** de pe un rând (ex. `12 18 30` → `6`). Un rând este în plus. Indentarea o stabilești tu.

```
A)  a, b = g, x
B)  while b != 0:
C)  a, b = b, a % b
D)  g = a
E)  g = 0
F)  for x in map(int, input().split()):
G)  print(g)
H)  g = 1
```

De ce poate porni `g` de la 0?

**P12.** Pentru `84 126` programul afișează `2.0/3.0`. Un elev a tradus din C++ `a / x` fără să se gândească. Repară-l.

```
a, b = map(int, input().split())
x, y = a, b
while y != 0:
    x, y = y, x % y
print(f"{a / x}/{b / x}")
```

**P13.** Programul de simplificare (cel corectat la P12) este testat pe `0 5`, `6 0` și `0 0`. Ce afișează în fiecare caz? Care rezultate sunt inacceptabile și ce validare trebuie adăugată?

**P14.** Programul adună `a/b` și `c/d`. Pentru `1 -2` și `1 3` afișează `1/-6`. Rezultatul este corect ca valoare, dar nu este scris corect. Adaugă un singur `if`, astfel încât numitorul să fie mereu pozitiv.

```
a, b, c, d = map(int, input().split())
x, y = a * d + b * c, b * d
p, q = abs(x), abs(y)
while q != 0:
    p, q = q, p % q
print(f"{x // p}/{y // p}")
```

## Nivelul 3 · Scrie cod

★★ scrie cod

Folosește Euclid prin împărțiri, scris de tine. Verifică **toate** testele.

**P15. Plăcile de gresie.** Citește lungimea și lățimea unei săli (cm). Afișează latura celei mai mari plăci pătrate care acoperă exact sala și numărul de plăci.

| intrare | ieșire |
|---|---|
| `360 270` | `90 12` |
| `500 300` | `100 15` |
| `17 13` | `1 221` |

**P16. Semafoarele.** Se citesc `r1 v1 r2 v2`: duratele (în secunde) pentru roșu și verde ale două semafoare care pornesc simultan pe roșu. După câte secunde încep din nou, simultan, roșul?

| intrare | ieșire |
|---|---|
| `40 20 45 45` | `180` |
| `30 30 30 30` | `60` |
| `25 10 14 7` | `105` |

**P17. Operații cu două fracții.** Citește `a b` (pe primul rând) și `c d` (pe al doilea). Afișează suma, diferența, produsul și câtul, fiecare simplificat și cu numitorul pozitiv. Dacă împărțirea nu se poate face, afișează `imposibil`.

| intrare | ieșire |
|---|---|
| `3 4` / `5 6` | `19/12`, `-1/12`, `5/8`, `9/10` |
| `1 2` / `1 2` | `1/1`, `0/1`, `1/4`, `1/1` |
| `2 3` / `0 5` | `2/3`, `2/3`, `0/1`, `imposibil` |
| `1 -2` / `1 3` | `-1/6`, `-5/6`, `-1/6`, `-3/2` |

**P18. Prieteni cu n.** Câte numere din `1, 2, …, n` sunt prime cu `n`?

| intrare | ieșire |
|---|---|
| `12` | `4` |
| `7` | `6` |
| `1` | `1` |
| `100` | `40` |

**P19. cmmdc și cmmmc pentru mai multe numere.** Citește numere de pe un rând și afișează cmmdc și cmmmc ale tuturor.

| intrare | ieșire |
|---|---|
| `12 18 30` | `6 180` |
| `7` | `7 7` |
| `4 6 8 10` | `2 120` |

**P20. Raportul ecranului.** Un ecran are rezoluția `w × h` pixeli. Afișează raportul de aspect simplificat, sub forma `w:h`. **Scrie mai întâi algoritmul în pseudocod** (cu pașii lui Euclid, ca la Bac), apoi traduce-l în Python.

| intrare | ieșire |
|---|---|
| `1920 1080` | `16:9` |
| `1280 1024` | `5:4` |
| `2560 1080` | `64:27` |
| `1366 768` | `683:384` |

## Nivelul 4 · Pune mintea la contribuție

★★★ pune mintea la contribuție

**P21. Cel mai rău caz.** Scrie un program care, pentru toate perechile `1 ≤ a, b ≤ 100`, numără pașii ambelor variante. Pentru ce perechi se fac cei mai mulți pași la scăderi? Dar la împărțiri? Ce au special numerele găsite la împărțiri?

**P22. Problemă inversă.** Găsește toate perechile `10 ≤ a < b ≤ 50` cu `cmmdc(a, b) = 6` și `cmmmc(a, b) = 72`. Rezolvă întâi pe hârtie (ce știi despre `a · b`?), apoi verifică cu un program.

**P23. De ce funcționează?** (a) Arată că orice divizor comun al lui `a` și `b` îl divide și pe `a % b`. (b) De ce bucla `while b != 0: a, b = b, a % b` se oprește sigur, pentru orice numere naturale? (c) De ce face varianta cu scăderi exact `a − 1` pași pentru perechea `(a, 1)`?

**P24. O formulă care nu se generalizează.** Verifică cu un program că `cmmdc(a, b) · cmmmc(a, b) = a · b` pentru toate perechile până la 200. Este adevărat și `cmmdc(a, b, c) · cmmmc(a, b, c) = a · b · c`? Găsește un contraexemplu cu numere mici.

**P25. Mini-proiect: calculatorul de fracții.** Programul citește un rând de forma `3/4 + 5/6` (operatorii `+ - * /`, separați prin spații) și afișează rezultatul simplificat. Dacă numitorul final este 1, afișează doar numărătorul. Dacă fracția este supraunitară, adaugă și forma de număr mixt. Indiciu: `"3/4".split("/")` dă `["3", "4"]`.

| intrare | ieșire |
|---|---|
| `3/4 + 5/6` | `19/12 = 1 7/12` |
| `7/2 * 2/7` | `1` |
| `1/3 - 5/6` | `-1/2` |
| `2/3 / 0/5` | `imposibil` |

## Probleme de lucru în clasă (pbinfo)

Le rezolvăm împreună în ședință, în ordinea de mai jos.

- [ ] #58 **cmmdc** — ușoară
  https://www.pbinfo.ro/probleme/58/cmmdc
- [ ] #59 **cmmmc** — ușoară
  https://www.pbinfo.ro/probleme/59/cmmmc
- [ ] #391 **fractii** — ușoară
  https://www.pbinfo.ro/probleme/391/fractii

## Temă pentru acasă (pbinfo)

Trimite soluțiile pe pbinfo și notează punctajul obținut. Bifează ce ai terminat.

- [ ] #60 **primeintreele** — ușoară
  https://www.pbinfo.ro/probleme/60/primeintreele
- [ ] #61 **afisaredivizoricomuni** — ușoară
  https://www.pbinfo.ro/probleme/61/afisaredivizoricomuni